www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Notations

La base canonique de $\mathbb{R}^p$ (p entier ≥ 2) est notée $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$. Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ est identifié à sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et M_p désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

On désigne par S l'ensemble des matrices $H = (H_{ij})$ de M_p dont tous les éléments H_{ij} sont positifs ou nuls et vérifient $(\forall\, i \in \{1,2,\ldots,p\}) \sum_{j=1}^{p} H_{ij} = 1$. On note I la matrice Identité, 0 la matrice nulle de M_p et U la matrice de M_p dont tous les coefficients sont égaux à 1, enfin E le sous-espace vectoriel réel de M_p engendré par I et U.

I ETUDE ALGEBRIQUE DE E

1) a) Montrer que (I,U) est une base de E.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer U^n.

2) a) Montrer que E est une sous-algèbre de l'algèbre M_p.

b) Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer les composantes de A^n dans la base (I,U) en fonction de α, β et n.

3) a) Soit A un élément de E inversible dans M_p et φ l'endomorphisme de E qui a toute matrice M de E associé AM. Prouver que φ est un automorphisme et en déduire que A^{-1} est élément de E.

b) Pour $A = \alpha I + \beta U$, donner les conditions portant sur α et β pour que A soit inversible. Déterminer alors les composantes de A^{-1} dans la base (I,U).

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'expression de A^n dans cette base.

4) Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E où $\beta \neq 0$.

a) Déterminer un polynome P à coefficients réels de la forme $P = X^2 + \gamma X + \delta$ tel que $P(A) = 0$. Prouver l'unicité d'un tel polynome P.

b) Soit Q un polynome à coefficients réels, montrer que $Q(A) = 0$ si et seulement si P divise Q.

II VALEURS ET VECTEURS PROPRES D'UN ELEMENT DE E

Dans toute la suite du problème, on posera : $\Pi_0 = \frac{1}{p} U$ et $\Pi_1 = I - \Pi_0$ $F_0 = \operatorname{Ker} \Pi_0$ et $F_1 = \operatorname{Ker} \Pi_1$

1) a) Montrer que Π_0 et Π_1 sont des projecteurs ; préciser leurs sous-espaces propres.

b) Donner les images de Π_0 et de Π_1. Expliciter une base de F_0 et une base de F_1 en fonction des e_j et du vecteur $f = \frac{1}{p}(e_1+e_2+\ldots+e_p)$.

2) a) Déterminer les sous-espaces propres de U et exprimer U en fonction de Π_0 et Π_1.

b) Prouver que (Π_0, Π_1) est une base de E.

3) Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A ainsi que les composantes de A dans la base (Π_0, Π_1).

Tournez la page S.V.P.

b) Pour $n \in N$, donner les composantes de A^n dans la base (Π_0, Π_1).

4) Soit $A = \alpha I + \beta U$, un élément de E où $\beta \neq 0$.

a) Déterminer les conditions sur α et β pour avoir : $A \in S$. Prouver qu'alors α appartient à $[-1,1[$.

b) Si de plus $\alpha \neq -1$, en déduire la limite de la suite (A^n).

c) Si $\alpha = -1$ et $A \in S$, montrer que nécessairement $\beta = 1$ et $p = 2$. Etudier alors le comportement de A^n lorsque n tend vers l'infini.

III APPLICATION A LA RESOLUTION DE SYSTEMES DIFFERENTIELS

Soit $A = \alpha I + \beta U$, un élément donné de E. On se propose d'étudier les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$X' = AX$ où $t \longrightarrow X(t)$ est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

1) Soit X une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tout nombre réel t, on écrit X(t) sous la forme unique $X(t) = Y(t) + Z(t)$ où Y(t) et Z(t) appartiennent respectivement à F_0 et à F_1.

a) Montrer que l'application X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y et Z le sont.

b) Montrer que X est solution du système différentiel $X' = AX$ si et seulement si les applications Y et Z sont solutions de systèmes différentiels que l'on précisera.

2) Pour tout élément a de $\mathbb{R}^p$, on note X_a l'unique solution de $X' = AX$ telle que $X(o) = a$.

a) On écrit a sous la forme $a = b + c$ où b et c appartiennent respectivement à F_0 et à F_1. Calculer Y_b et Z_c et en déduire X_a.

b) Un nombre réel t étant fixé, vérifier que l'application $a \longrightarrow X_a(t)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ que l'on note R(t). Ainsi $X_a(t) = R(t)a$. Prouver que R(t) est un élément de E et exprimer ses composantes dans la base (Π_0, Π_1) puis dans la base (I,U).

3) Application numérique A matrice de S, $p = 3$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $X(o) = a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Supposons t=2, calculer le vecteur X(2), l'erreur sur la valeur absolue des composantes étant inférieure à 10^{-3}.

IV ETUDE DES ELEMENTS DE S

1) a) Montrer que H admet 1 pour valeur propre.

b) Montrer que toute valeur propre de H est de module au plus égal à 1.

2) a) Soit λ une valeur propre de H, montrer qu'il existe un entier k ($1 \leq k \leq p$) tel que :

$|\lambda - H_{kk}| \leq 1 - H_{kk}$

b) On suppose alors $\forall i \in \{1,2,..,p\}$, $H_{ii} > 0$, que peut-on dire des valeurs propres de H autres que 1?

c) En déduire alors qu'il existe un disque fermé centré sur un H_{ii} particulier qui contient toutes les valeurs propres de la matrice H et qui est inclus strictement dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail